
الهندسة

الوحدة الرابعة

- ✓ متوسطات المثلث (نظريات - نتائج)
- ✓ المثلث المتساوي الساقين
- ✓ خواص المثلث المتساوي الساقين
- ✓ نظريات المثلث المتساوي الساقين

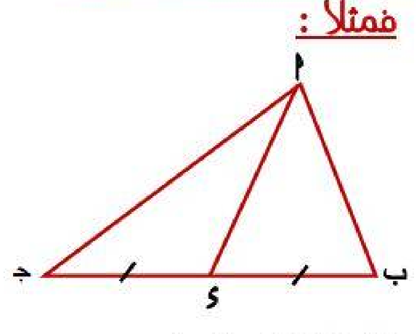
الدرس الأول

متوسطات المثلث

تعريف

متوسط المثلث هو القطعة المستقيمة الواصلة بين أى رأس من رءوس المثلث إلى منتصف الضلع المقابل لهذه الرأس

فمثلا :

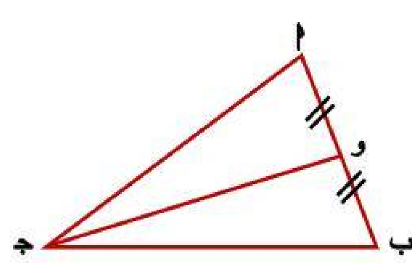


إذا كان د منتصف ب ج

فإن : أد يسمى متوسط

إذا كان هـ منتصف أ ج

فإن : ب هـ يسمى متوسط



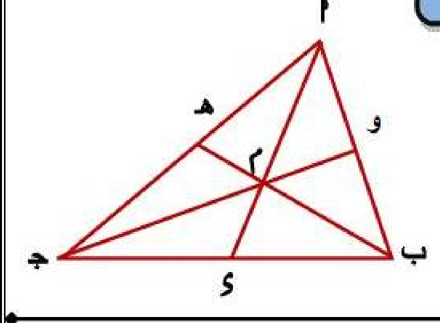
إذا كان و منتصف أ ب

فإن : ج و يسمى متوسط

∴ أى مثلث له ثلاثة متوسطات

نظرية (١)





فى Δ أ ب ج إذا كانت د منتصف ب ج ، هـ منتصف أ ج ، و منتصف أ ب

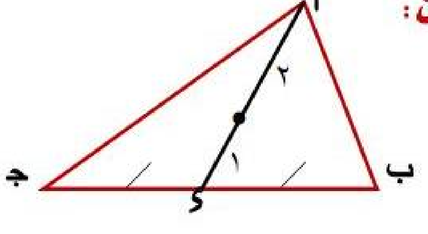
فإن : أد ، ب هـ ، ج و تتقاطع في نقطة واحدة .

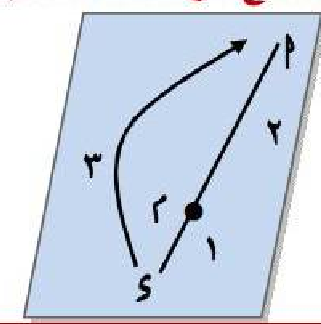
أي أن : أ د ∩ ب هـ ∩ ج و = {م}

نظرية (٢)

نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلا منها بنسبة ١ : ٢ من جهة القاعدة

إذا كان أ د متوسط فى Δ أ ب ج ، م نقطة تقاطع متوسطات المثلث فإن :







❶ م د = $\frac{١}{٢}$ أ م أو أ م = ٢ م د

❷ م د = $\frac{١}{٣}$ أ د أو أ د = ٣ م د

❸ أ م = $\frac{٢}{٣}$ أ د أو أ د = $\frac{٣}{٢}$ أ م

أي أن : إذا كان أ د متوسط طوله ٦سم ، م نقطة تلاقى متوسطات المثلث فإن : أ م = ٤ سم ، م د = ٢سم

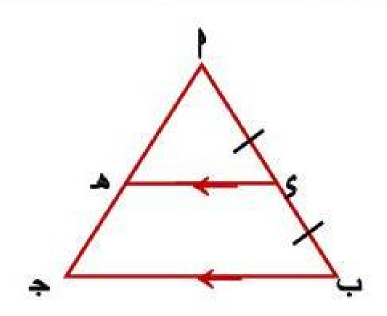
ملاحظه هامة :-

نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلا منها بنسبة ٢ : ١ من جهة الرأس.

حقيقة :-

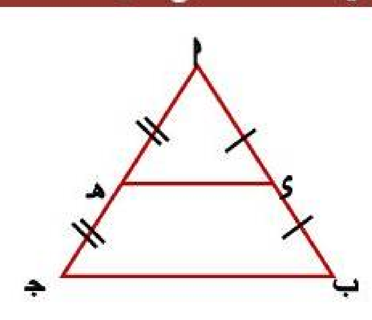
النقطه التي تقسم متوسط المثلث بنسبة ١ : ٢ من جهة القاعدة هي نقطة تقاطع متوسطات المثلث.

تذكر أن



إذا كان د منتصف أ ب

، د هـ // ب ج　فإن :　هـ منتصف أ ج



إذا كان د ، هـ منتصف أ ب ، أ ج

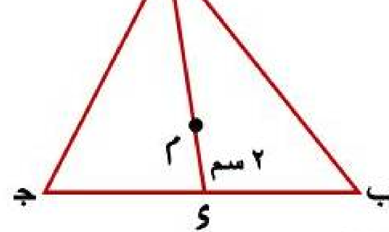
فإن : د هـ // ب ج ، د هـ = $\frac{1}{2}$ ب ج

تمارين متنوعة

(١) أكمل بإيجاد الأطوال المطلوبة ، حيث م نقطة تقاطع متوسطات المثلث :-

أ م = ... سم

د أ = ... سم



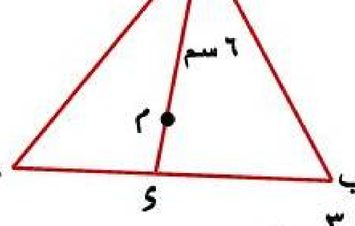
الحل

أ م = ٢ م د = ٤ سم

د أ = ٣ م د = ٦ سم

م د = ... سم

د أ = ... سم



الحل

م د = $\frac{1}{2}$ د أ = ٣ سم

د أ = أ م + م د = ٩ سم

ل م = ... سم

س م = ... سم

س
١٢ سم
م
ع
ص
ل

الحل

ل م = $\frac{1}{3}$ س ل = $\frac{12}{3}$ = ٤ سم

س م = ٢ ل م = ٨ سم

م د = ... سم ، ب م = ...سم ، د ب = ... سم

محيط المثلث ب م د = ... سم

أ
هـ
٦ سم
٣,٥ سم
م
ج
د
ب
١٠ سم

الحل

د م = $\frac{1}{2}$ أ م = ٣ سم

ب م = ٢ م هـ = ٧ سم

د ب = $\frac{1}{2}$ ب ج = ٥ سم

محيط Δ ب م د = ٣ + ٥ + ٧ = ١٥ سم

(٢) في الشكل المقابل :-

ء ، هـ منتصفا ب أ ، أ جـ ، ب م = ٦ سم ، ب جـ = ١٠ سم

ء جـ = ١٢ سم. إوجد محيط Δ ء م هـ ؟



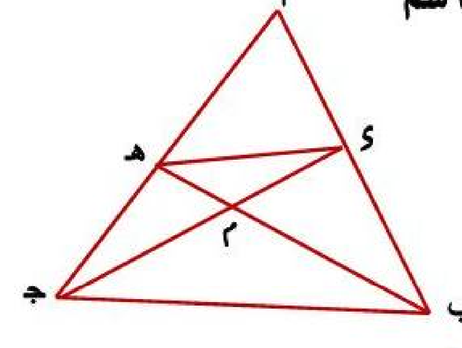
ء منتصف أ ب ∴ ء جـ متوسط ∴ م ء = $\frac{١}{٣}$ ء جـ = $\frac{١}{٣}$ × ١٢ = ٤ سم

هـ منتصف أ جـ ∴ ب هـ متوسط ∴ م هـ = $\frac{١}{٢}$ ب م = $\frac{١}{٢}$ × ٦ = ٣ سم

ء منتصف أ ب ، هـ منتصف أ جـ ∴ ء هـ = $\frac{١}{٢}$ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ × ١٠ = ٥ سم


∴ محيط Δ ء م هـ = ء م + م هـ + ء هـ = ٤ + ٣ + ٥ = ١٢ سم


(٣) في الشكل المقابل :-



ء ، هـ منتصفا أ ب ، أ جـ ، ء جـ = ٦ سم ، ب هـ = ٩ سم

ء هـ = ٥ سم. إوجد محيط Δ ب م جـ ؟



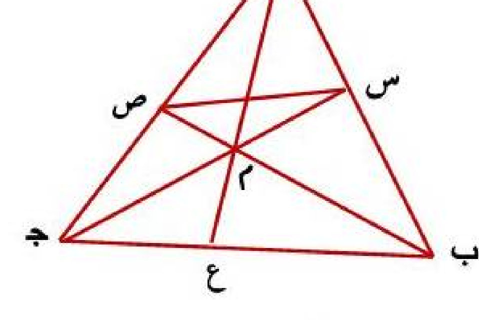
∵ ء منتصف أ ب ∴ ء جـ متوسط ∴ جـ م = $\frac{٢}{٣}$ ء جـ = $\frac{٢}{٣}$ × ٦ = ٤ سم

∵ هـ منتصف أ جـ ∴ ب هـ متوسط ∴ ب م = $\frac{٢}{٣}$ ب هـ = $\frac{٢}{٣}$ × ٩ = ٦ سم

∵ ء منتصف أ ب ، هـ منتصف أ جـ ∴ ب جـ = ٢ ء هـ = ٢ × ٥ = ١٠ سم

∴ محيط Δ ب م جـ = ٤ + ٦ + ١٠ = ٢٠ سم

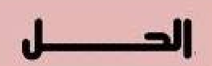
(٤) في الشكل المقابل :-



أ ب جـ مثلث فيه س منتصف أ ب ، ص ∈ أ جـ ، س ص // ب جـ

جـ س ∩ ب ص = {م} فإذا كان : أ م ∩ ب جـ = {ع}

إثبت أن : ب ع = $\frac{١}{٢}$ ب جـ



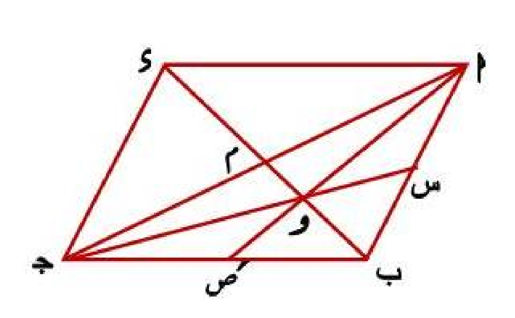
س منتصف أ ب ، س ص // ب جـ ∴ ص منتصف أ جـ

س منتصف أ ب ∴ جـ س متوسط ، ص منتصف أ جـ ∴ ب ص متوسط

أ ع ∩ ب ص ∩ جـ س = {م}

∴ ب ع متوسط ∴ ب ع = $\frac{١}{٢}$ ب جـ

(٥) في الشكل المقابل :-



أ ب جـ ء متوازي أضلاع ، ص منتصف ب جـ

أثبت أن : س و = $\frac{١}{٢}$ و جـ


الحل

∵ أ ب جـ ء متوازي أضلاع

∴ أ جـ ينصف ب ء

∵ م منتصف أ جـ   ∴ ب م متوسط

∵ ص منتصف ب جـ   ∴ أ ص متوسط

∵ أ ص ∩ ب م ∩ جـ س = { و }

∴ و نقطة تقاطع متوسطات المثلث أ ب جـ

∴ أ ص متوسط

∴ س و = $\frac{١}{٢}$ و جـ

(٦) في الشكل المقابل :-

أ ب جـ ء مستطيل تقاطع قطراه فى م ، هـ منتصف أ ب

، جـ هـ ∩ ء ب = { و } .

(١) إثبت أن : و نقطة تقاطع متوسطات المثلث .

(٢) إذا كان ب و = ٤سم أوجد طول أ م


الحل

هـ منتصف أ ب   ∴ جـ هـ متوسط فى Δ أ ب جـ

∵ م منتصف أ جـ (القطران ينصف كلا منهما الاخر)   ∴ ب م متوسط

∵ جـ هـ ∩ ب م = { و }   ∴ و نقطة تقاطع متوسطات المثلث أ ب جـ   (المطلوب أولا)

∵ ب و = ٤ سم   ∴ و م = ٢سم   ∴ ب م = ٦سم

فى المستطيل القطران متساويان وينصف كلا منهما الاخر

∴ أ م = ب م = ٦ سم   (المطلوب ثانيا)

اجب بنفسك

(١) فى الشكل المقابل :

أ ب جـ مثلث ، م نقطة تقاطع متوسطاته

فإذا كان : م ء = ٣ سم ، ب م = ٤سم

، ب جـ = ٩ سم

فأوجد :

❶ طول ب و

❷ طول م جـ

❸ طول م هـ

(٢) فى الشكل المقابل :

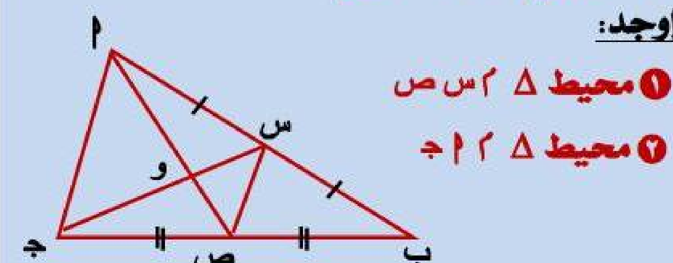
س ، ص منتصفا أ ب ، ب جـ ، س ص = ٥ سم ،

جـ م = ٨ سم ، ص م = ٣ سم

أوجد:

❶ محيط Δ م س ص

❷ محيط Δ م أ جـ



نظرية (٣)

فى المثلث القائم طول المتوسط الخارج من رأس القائمة يساوي نصف طول الوتر

المعطيات أ ب جـ مثلث فيه ق (أ ب̂ جـ) = ٩٠°

ب ء متوسط فى المثلث أ ب جـ

المطلوب إثبات أن : ب ء = $\frac{1}{2}$ أ جـ

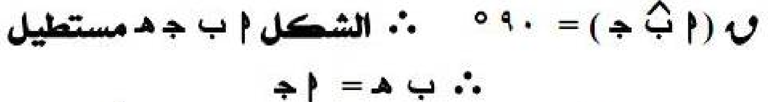
العمل نرسم ء ب ونأخذ هـ ∈ ء ب

بحيث ء ب = ء هـ

البرهان الشكل أ ب جـ هـ فيه أ جـ ، ب هـ ينصف كلا منهما الاخر



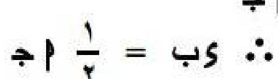
∴ الشكل أ ب جـ هـ متوازى أضلاع



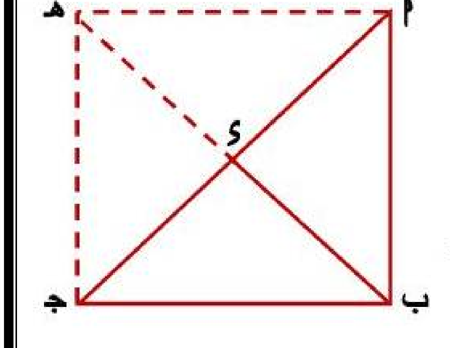
ق (أ ب̂ جـ) = ٩٠° ∴ الشكل أ ب جـ هـ مستطيل

∴ ب هـ = أ جـ

∴ ء ب = $\frac{1}{2}$ ب هـ



∴ ء ب = $\frac{1}{2}$ أ جـ



فمثلاً : فى الشكل المقابل :-

إذا كان ء منتصف أ جـ

، أ جـ = ١٠ سم فإن : ب ء = ٥ سم

والعكس صحيح :-

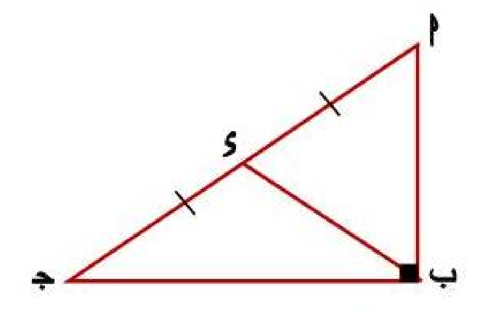


إذا كان ء منتصف أ جـ وكان ب ء = ٣سم فإن أ جـ = ٦سم

لاحظ أن : ب ء = أ ء = ء جـ وبالتالى فإن :-

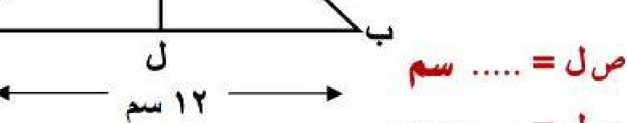
① المثلث أ ب ء يكون مثلث متساوى الساقين .

② المثلث ء ب جـ يكون مثلث متساوى الساقين.



تمارين متنوعة



ص ل = ... سم

س ل = ... سم

الحل

ص ل = $\frac{1}{2}$ س ع = ٦ سم

س ل = $\frac{1}{2}$ س ع = ٦ سم

ا ج = ... سم

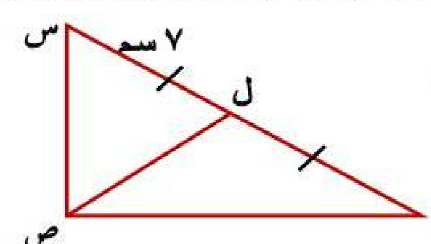
ء ج = ... سم

الحل

ق ($\hat{ب}$) = ٩٠° ، $\overline{ب ء}$ متوسط

ا ج = ٢ ب ء = ١٠ سم

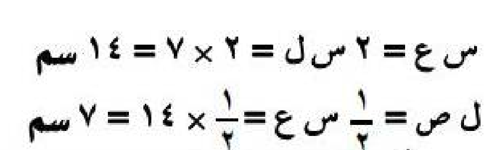
ء ج = $\frac{1}{2}$ ا ج = ٥ سم



س ع = ... سم

ل ص = ... سم

الحل



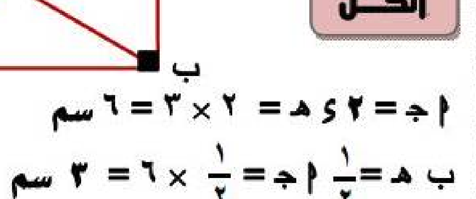
س ع = ٢ س ل = ٢ × ٧ = ١٤ سم

ل ص = $\frac{1}{2}$ س ع = $\frac{1}{2}$ × ١٤ = ٧ سم

ا ج = ... سم

ب هـ = ... سم

الحل

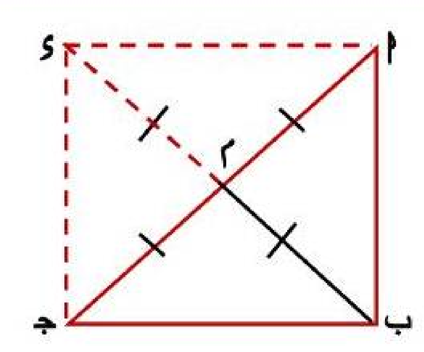


ا ج = ٢ ء هـ = ٢ × ٣ = ٦ سم

ب هـ = $\frac{1}{2}$ ا ج = $\frac{1}{2}$ × ٦ = ٣ سم

عكس النظرية (٣)

إذا كان طول متوسط المثلث المرسوم من أحد رءوسه يساوى نصف طول الضلع المقابل لهذا الرأس فإن زاوية هذا الرأس تكون قائمة.



المعطيات ا ب ج مثلث فيه ، $\overline{ب م}$ متوسط ، ب م = $\frac{1}{2}$ ا ج

المطلوب إثبات أن : ق (ا $\hat{ب}$ ج) = ٩٠°

العمل نرسم $\overleftarrow{ب م}$ ونأخذ ء ∈ $\overleftarrow{ب م}$ بحيث ب م = م ء

البرهان ب م = $\frac{1}{2}$ ا ج = $\frac{1}{2}$ ب ء

∴ ا ج = ب ء



∴ الشكل ا ب ج ء فيه ا ج ، ب ء قطران متساويان فى الطول وينصف كلا منهما الاخر

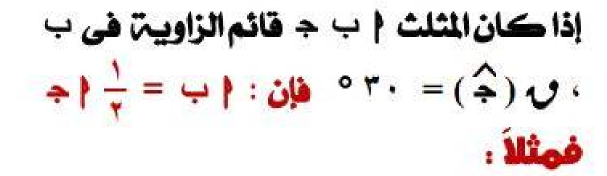
∴ الشكل ا ب ج ء مستطيل

∴ ق (ا $\hat{ب}$ ج) = ٩٠°



نتيجة

فى المثلث القائم الزاوية طول الضلع المقابل للزاوية ٣٠° يساوي نصف طول الوتر.



إذا كان المثلث ٢ ب جـ قائم الزاوية فى ب

، ق ($\hat{جـ}$) = ٣٠° فإن : ٢ ب = $\frac{1}{2}$ ٢ جـ

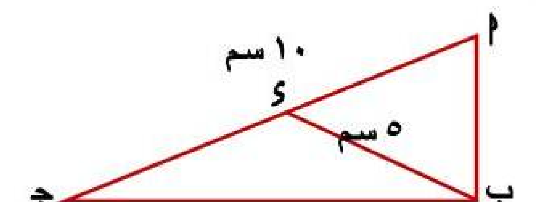
فمثلاً :

إذا كان ٢ جـ = ٨ سم فإن : ٢ ب = ٤ سم

إذا كان ٢ ب = ٦ سم فإن : ٢ جـ = ١٢ سم



تمارين متنوعة



(١) في الشكل المقابل :-

ى منتصف ٢ جـ ، ٢ جـ = ١٠ سم ، ب ى = ٥ سم

أثبت أن : ق (٢ $\hat{ب}$ جـ) = ٩٠° ؟

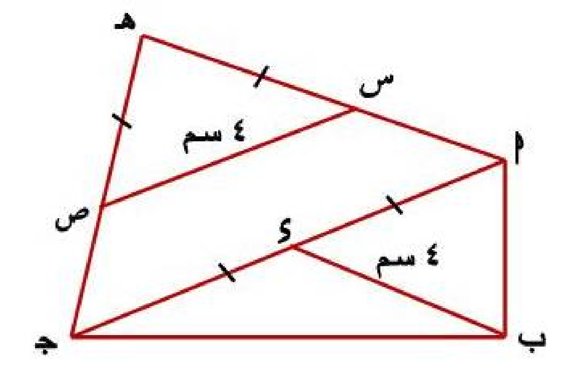
الحــل

∵ ب ى متوسط فى Δ ٢ ب جـ

∴ ب ى = $\frac{1}{2}$ ٢ جـ = ٥ سم ∴ ق (٢ $\hat{ب}$ جـ) = ٩٠° (نظرية)



(٢) في الشكل المقابل :-



س منتصف ٢ هـ ، ص منتصف هـ جـ ، ى منتصف ٢ جـ

، س ص = ٤ سم ، ب ى = ٤ سم

أثبت ان : ق ($\hat{ب}$) = ٩٠°

الحــل

فى Δ هـ ٢ جـ

∵ س منتصف ٢ هـ ، ص منتصف هـ جـ

∵ س ص = $\frac{1}{2}$ ٢ جـ ∴ ٢ جـ = ٨ سم

فى Δ ٢ ب جـ

∵ ب ى متوسط ، ب ى = ٤ سم ، ٢ جـ = ٨ سم

∴ ب ى = $\frac{1}{2}$ ٢ جـ ∴ ق ($\hat{ب}$) = ٩٠°

(٣) في الشكل المقابل :-

س منتصف أ هـ ، س ص أ جـ ، ء منتصف أ جـ

، ب ء = ٥ سم ، ق ($\hat{ب}$) = ٩٠°

اوجد بالبرهان طول $\overline{س ص}$



في Δ أ ب جـ   ق ($\hat{ب}$) = ٩٠°

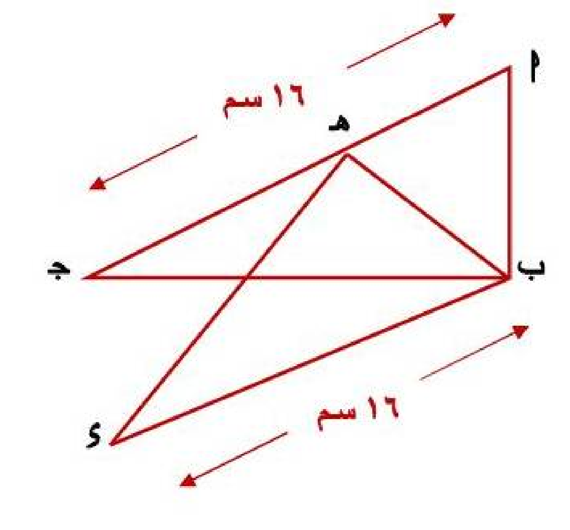
∵ ب ء متوسط   ∴ أ جـ = ٢ ب ء   ∴ أ جـ = ٢ × ٥ = ١٠ سم

في Δ أ هـ جـ   س منتصف أ هـ   ، $\overline{س ص}$ // $\overleftarrow{أ جـ}$

∴ $\overleftarrow{س ص}$ ينصف $\overline{هـ جـ}$ ∴ ص منتصف $\overline{هـ جـ}$

∴ س ص = $\frac{١}{٢}$ أ جـ   ∴ س ص = $\frac{١}{٢}$ × ١٠ = ٥ سم

(٤) في الشكل المقابل :-



هـ منتصف $\overline{أ جـ}$ ، ق ($\hat{ء}$) = ٣٠° ، أ جـ = ١٦ سم

، ب ء = ١٦ سم ، ق (ب $\hat{هـ}$ ء) = ٩٠°

اوجد: (١) طول $\overline{ب هـ}$

(٢) برهن أن : ق (أ $\hat{ب}$ جـ) = ٩٠°



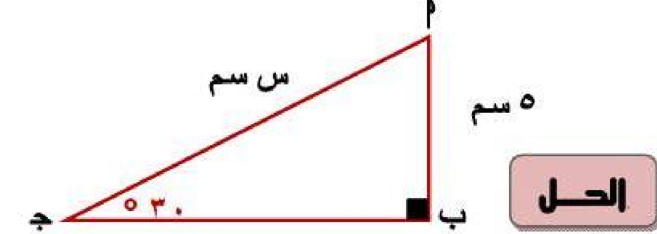
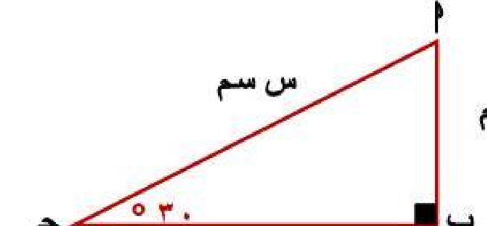
∵ Δ ب هـ ء قائم الزاوية في هـ   ، ق ($\hat{ء}$) = ٣٠°

∴ ب هـ = $\frac{١}{٢}$ ب ء = ٨ سم   **المطلوب أولاً**

∵ ب هـ متوسط في أ ب جـ   ، ب هـ = $\frac{١}{٢}$ أ جـ

∴ ق (أ $\hat{ب}$ جـ) = ٩٠°   **المطلوب ثانياً**

(٥) أوجد قيمة س في كل من الحالات الآتية : -

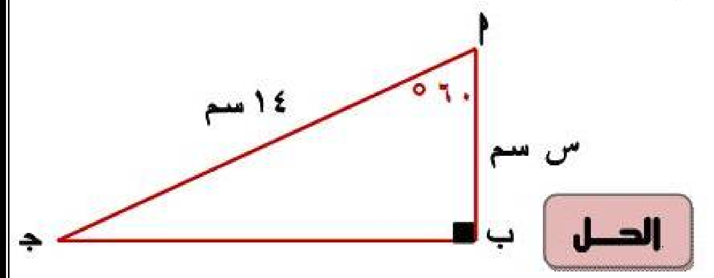
الحـل

حيث ق (ب̂) = ٣٠°

أجـ = ٢ أ ب

∴ أجـ = ٢ × ٥ = ١٠ سم

س = ١٠ سم



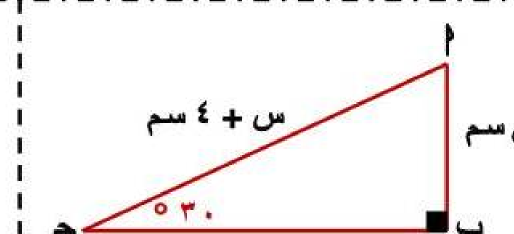
الحـل

∵ ق (أ̂) = ٣٠°

∴ ق (جـ̂) = ٩٠° - ٦٠° = ٣٠°

∴ أ ب = $\frac{١}{٢}$ أ جـ = $\frac{١}{٢}$ × ١٤ = ٧ سم

س = ٧ سم

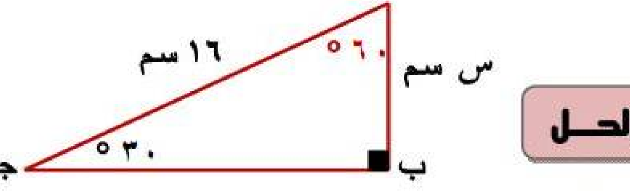


الحـل

أجـ = ٢ أ ب

∴ س + ٤ = ٢ س   ∴ ٤ = ٢ س − س

س = ٤ سم



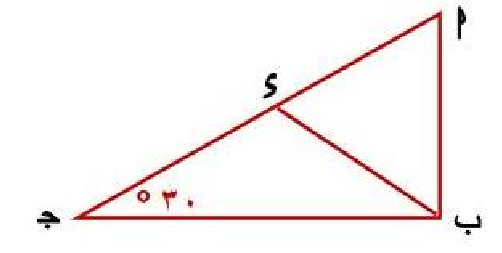
الحـل

ق (ب̂) = ١٨٠° - (٦٠° + ٣٠°) = ٩٠°

∴ أ ب = $\frac{١}{٢}$ أ جـ = $\frac{١}{٢}$ × ١٦ = ٨ سم

س = ٨ سم

(٦) في الشكل المقابل :-



أ جـ = ١٠ سم ، ق (جـ̂) = ٣٠°

ق (أ ب̂ جـ) = ٩٠° ، ء منتصف أ جـ

أوجد محيط Δ أ ب ء ؟

الحـل

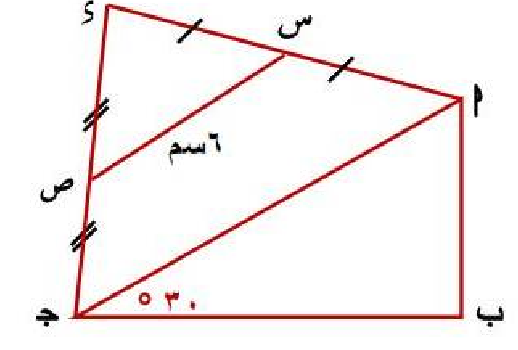
∵ ء منتصف أ جـ ، ق (أ ب̂ جـ) = ٩٠° ∴ ب ء = $\frac{١}{٢}$ أ جـ = ٥ سم

∵ ق (جـ̂) = ٣٠° ، ق (أ ب̂ جـ) = ٩٠° ∴ أ ب = $\frac{١}{٢}$ أ جـ = ٥ سم

∴ محيط Δ أ ب ء = أ ب + ب ء + أ ء = ٥ + ٥ + ٥ = ١٥سم

(٧) في الشكل المقابل :-

أوجد طول أ ب ؟



الحـــل

∵ س منتصف أ د ، ص منتصف د ج

∴ س ص = $\frac{1}{2}$ أ ج   ∴ أ ج = ١٢ سم

في Δ أ ب ج   ق (∠ أ ب ج) = ٩٠° ، ق (∠ أ ج ب) = ٣٠°

∴ أ ب = $\frac{1}{2}$ أ ج = ٦ سم

في الشكل المقابل :-

أ ب ج قائم الزاوية في ب ، ق (ج) = ٣٠°

فإن : ق (أ) = ٩٠° ـ ٣٠° = ٦٠°



∴ المثلث أ ب ج يحتوي علي زاويتين قياسهما ٣٠° ، ٦٠°

أ ، ب ، ج ، ٢ل ، ل ، ل $\sqrt{3}$ ، ٣٠°

لذا يسمي مثلثاً قائم الزاوية ثلاثينياً ستينياً

اجب بنفسك

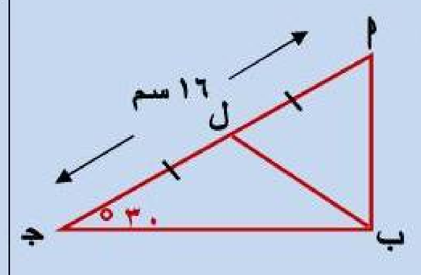
(١) في الشكل المقابل :

أ ب ج مثلث فيه : ق (∠ أ ب ج) = ٩٠° ، ق (ج) = ٣٠° ، أ ج = ١٦ سم ، ل منتصف أ ج

أوجد :

① طول أ ب ، ب ل

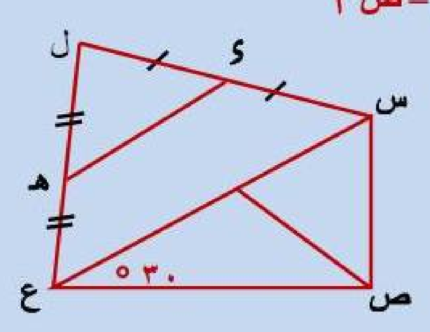
② محيط Δ أ ب ل



(٢) في الشكل المقابل :

ق (∠ أ ب ج) = ٩٠° ، د منتصف س ل ، هـ منتصف ع ل ، م منتصف س ع

أثبت أن : د هـ = ص م





المثلث المتساوي الساقين

المثلثات تصنف حسب أطوال أضلاعها إلى ثلاثة أنواع :

❶ مثلث متساوى الأضلاع
❷ مثلث متساوي الساقين
❸ مثلث مختلف الأضلاع

وسوف ندرس هذا العام المثلث المتساوى الساقين بنظرياتة

المثلث المتساوي الساقين

Δ ا ب جـ مثلث متساوي الساقين حيث :

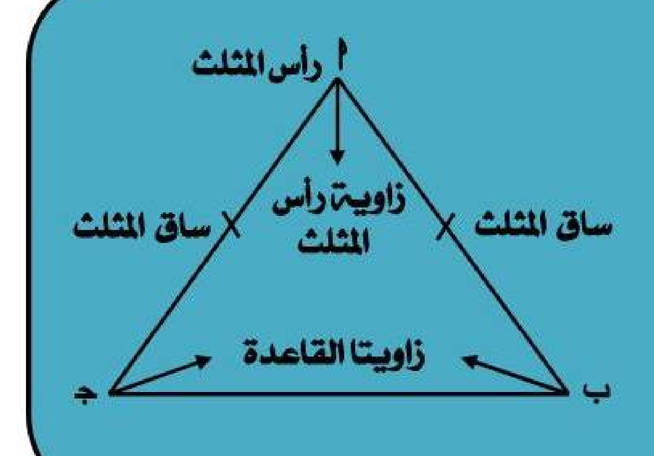
① ا ب = ا جـ ($\overline{\text{ا ب}}$ ، $\overline{\text{ا جـ}}$ ساقا المثلث)

② $\overline{\text{ب جـ}}$ (قاعدة المثلث)

③ (ا) رأس المثلث

④ ($\hat{\text{ا}}$) زاوية المثلث

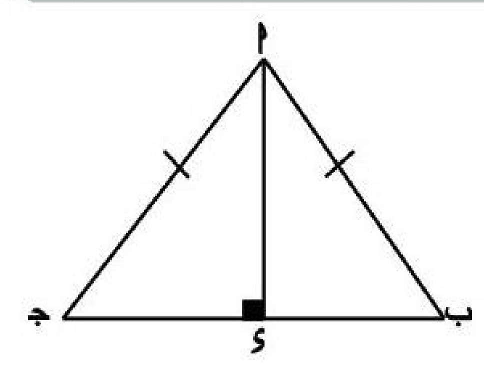
⑤ ($\hat{\text{ب}}$) ، ($\hat{\text{جـ}}$) زاويتا قاعدة المثلث



نظريات المثلث المتساوي الساقين

نظرية (١)

زاويتا القاعدة فى المثلث المتساوي الساقين متطابقتان



المعطيات ا ب جـ مثلث فيه ا ب = ا جـ

المطلوب إثبات أن ($\hat{\text{ب}}$) ≡ ($\hat{\text{جـ}}$)

العمل نرسم $\overline{\text{ا ء}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$

البرهان ∵ فى ΔΔ ا ب ء ، ا جـ ء

(١) ا ب = ا جـ (معطى)

(٢) ا ء ضلع مشترك

(٣) ق (ا ء̂ ب) = ق (ا ء̂ جـ) = ٩٠° (عملا)

∴ Δ ا ب ء ≡ Δ ا جـ ء

∴ ق ($\hat{\text{ب}}$) = ق ($\hat{\text{جـ}}$)

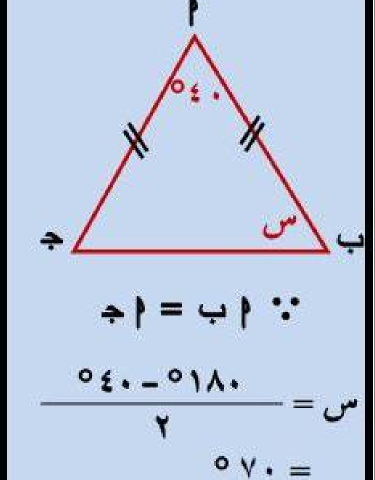
∴ ($\hat{\text{ب}}$) ≡ ($\hat{\text{جـ}}$)

نتيجة (١) إذا كان المثلث متساوي الأضلاع فإن زواياه الثلاثة تكون متطابقة ويكون قياس كل منها ٦٠° .

نتيجة (٢) قياس أي زاوية خارجة للمثلث يساوي مجموع قياس الزاويتين الداخلتين ما عدا المجاورة لها .

تمارين متنوعة

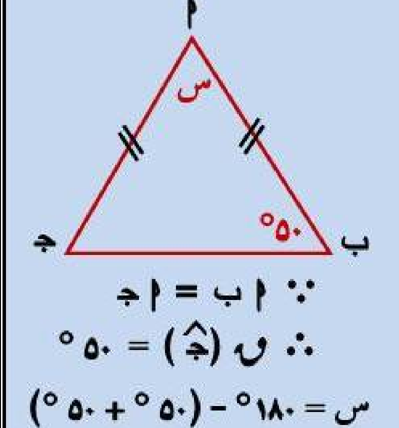
(١) أوجد قيمة س في كل مما يأتي :-



∵ أ ب = أ ج

$س = \frac{١٨٠° - ٤٠°}{٢}$

= ٧٠°

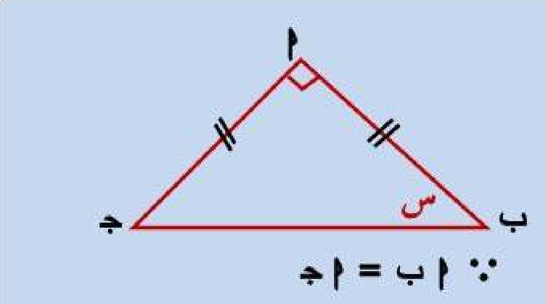


∵ أ ب = أ ج

∴ ق $(\hat{ج})$ = ٥٠°

س = ١٨٠° - (٥٠° + ٥٠°)

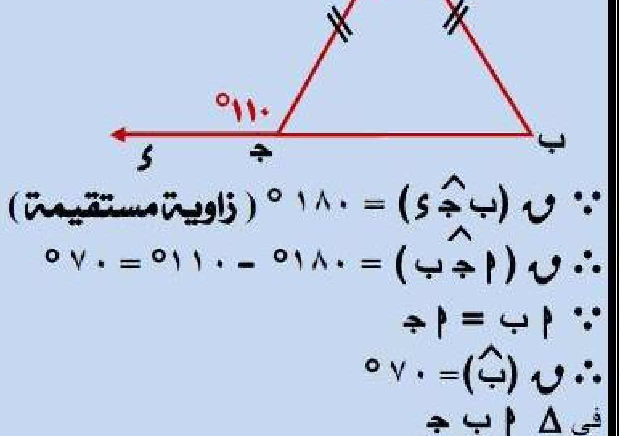
= ٨٠°



∵ أ ب = أ ج

∴ ق $(\hat{ب})$ = ق $(\hat{ج})$ = $\frac{١٨٠° - ٩٠°}{٢}$

= ٤٥°



∵ ق (ب $\hat{ج}$ د) = ١٨٠° (زاوية مستقيمة)

∴ ق (أ $\hat{ج}$ ب) = ١٨٠° - ١١٠° = ٧٠°

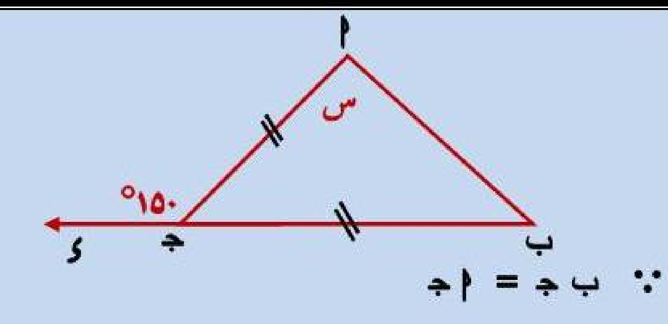
∵ أ ب = أ ج

∴ ق $(\hat{ب})$ = ٧٠°

في Δ أ ب ج

∴ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

∴ ق $(\hat{أ})$ = ١٨٠° - (٧٠° + ٧٠°) = ٤٠°

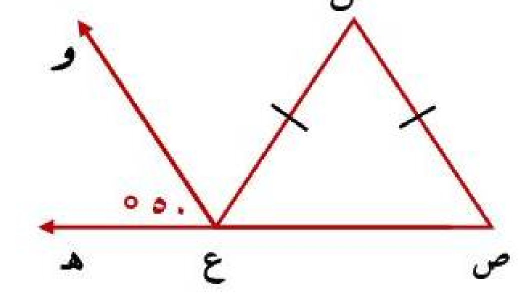


∵ ب ج = أ ج

، (أ $\hat{ج}$ د) خارجة عن Δ أ ب ج

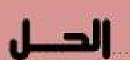
∴ ق $(\hat{أ})$ = ق $(\hat{ب})$ = $\frac{١٥٠°}{٢}$ = ٧٥°

(٢) في الشكل المقابل :-



ص س // ع و ، س ص = س ع

أوجد قياسات زوايا المثلث س ص ع ؟



∵ ص س // ع و

∴ ق (ص̂) = ق (و ع̂ هـ) = ٥٠° [متناظرتان]

، ∵ س ص = س ع ∴ ق (ص̂) = ق (س ع̂ ص) = ٥٠°

∵ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

∴ ق (س̂) = ١٨٠° − [٥٠° + ٥٠°] = ١٨٠° − ١٠٠° = ٨٠°

(٣) في الشكل المقابل :-

أ ب = أ جـ ، أ هـ // جـ ب

أوجد قياسات زوايا المثلث أ ب جـ ؟

الحل

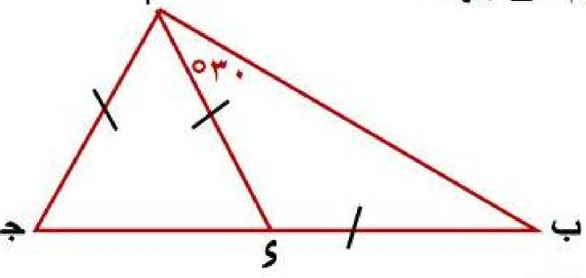
أ هـ // جـ ب ∴ ق (أ ء̂ هـ) = ق (جـ̂) = ٧٠°

أ ب = أ جـ ∴ ق (ب̂) = ق (جـ̂) = ٧٠°

∵ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

∴ ق (ب أ̂ جـ) = ١٨٠° − [٧٠° + ٧٠°] = ١٨٠° − ١٤٠° = ٤٠°

(٤) في الشكل المقابل :-



ب ء = أ ء = أ جـ ، ق (ب أ̂ ء) = ٣٠°

أوجد : ق (ء أ جـ) ؟

الحل

فى Δ أ ب ء

ب ء = أ ء ∴ ق (ب̂) = ق (ب أ̂ ء) = ٣٠°

∵ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

∴ ق (أ ء̂ ب) = ١٨٠° − [٣٠° + ٣٠°] = ١٨٠° − ٦٠° = ١٢٠°

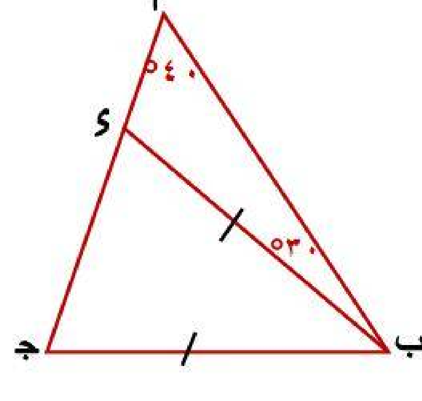
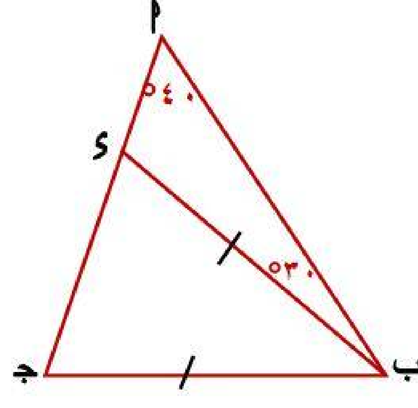
∵ ق (ب ء̂ جـ) = ١٨٠° (زاوية مستقيمة)

∴ ق (أ ء̂ جـ) = ١٨٠° − ١٢٠° = ٦٠°

فى Δ أ ء جـ أ ء = أ جـ ∴ ق (أ ء̂ جـ) = ق (أ جـ̂ ء) = ٦٠°

∵ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

∴ ق (ء أ̂ جـ) = ١٨٠° − [٦٠° + ٦٠°] = ١٨٠° − ١٢٠° = ٦٠°

(٥) في الشكل المقابل :-

إذا كان : ب ء = ب ج

أوجد : ق (ب ج̂ ء) ، ق (ء ب̂ ج) ؟

الحـــل

ق (ب ء̂ ج) = ق (أ̂) + ق (أ ب̂ ء)

لإنها خارجة عن Δ أ ب ء

∴ ق (ب ء̂ ج) = °٣٠ + °٤٠ = °٧٠

∵ ب ء = ب ج ∴ ق (ب ء̂ ج) = ق (ج̂) = °٧٠

∴ ق (ء ب̂ ج) = °١٨٠ − [°٧٠ + °٧٠] = °٤٠

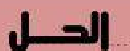
(٦) في الشكل المقابل :-



ق (أ̂) = °٥٠ ، أ ب = أ ج

ء ب ج متساوي الاضلاع

أوجد : ق (أ ب̂ ء) ؟



الحـــل

فى Δ أ ب ج

أ ب = أ ج ∴ ق (أ ب̂ ج) = ق (أ ج̂ ب) = $\frac{١٨٠ - ٥٠}{٢}$ = °٦٥

فى Δ ب ج ء

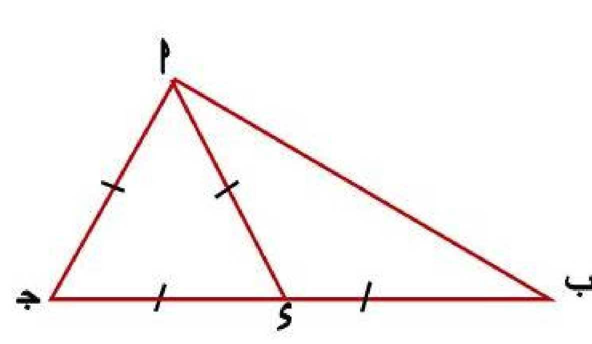
ب ء = ء ج = ب ج

∴ ق (ج ب̂ ء) = ق (ب ء̂ ج) = ق (ج ء̂ ب) = °٦٠

∴ ق (أ ب̂ ء) = °٦٠ + °٦٥ = °١٢٥



(٧) في الشكل المقابل :-

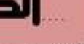


أ ج ء متساوي الأضلاع

أ ء ب متساوي الساقين فأوجد :

① ق (أ ء̂ ب) ② ق (ب̂)

③ ق (ب أ̂ ج)

الحـــل

∵ Δ أ ج ء متساوي الأضلاع

∴ ق (أ ء ب) = °١٢٠ (خارجة عن المثلث المتساوي الأضلاع)

∵ Δ أ ء ب متساوي الساقين

ق (ب̂) = ق (ب أ̂ ء) = $\frac{١٨٠ - ١٢٠}{٢}$ = °٣٠

ق (ب أ̂ ج) = °٣٠ + °٦٠ = °٩٠

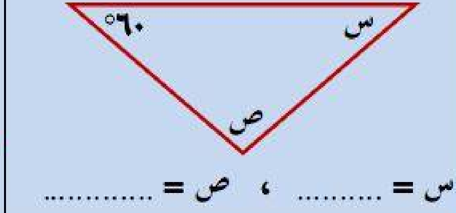
ملاحظات

① كل من زاويتي القاعدة فى المثلث المتساوي الساقين حادة .

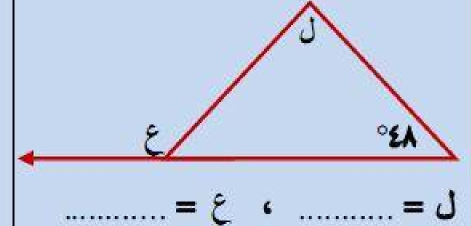
② زاوية الرأس في المثلث المتساوي الساقين من الممكن أن تكون حادة أو قائمة أو منفرجة.

اجب بنفسك

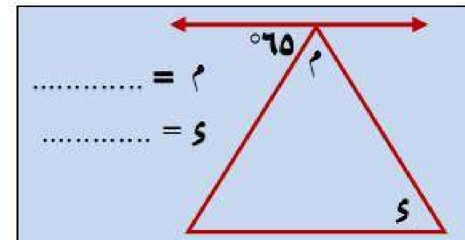
(١) أوجد قيمة الرموز المستخدمة في قياسات الزوايا الآتية :-



س = ... ، ص = ...



ل = ... ، ع = ...



م = ...

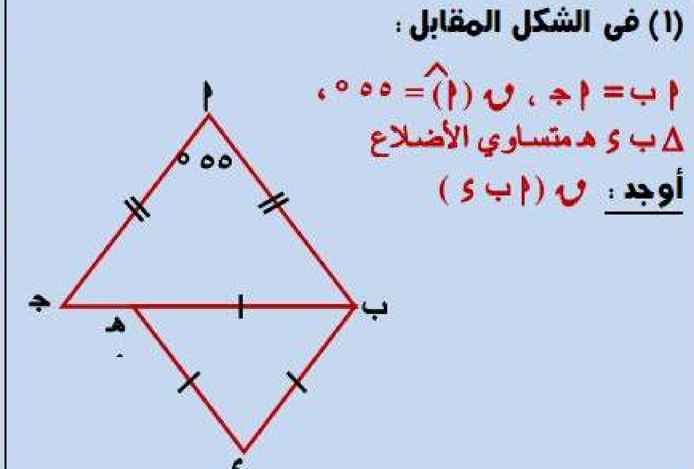
ى = ...

(١) فى الشكل المقابل :

أ ب = أ جـ ، ق (أ^) = ٥٥° ،

Δ ب ى هـ متساوي الأضلاع

أوجد : ق (أ ب ى)



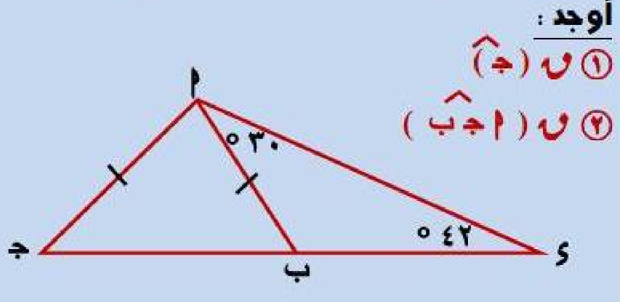
(٢) فى الشكل المقابل :

أ ب = أ جـ ، ق (ى أ ب^) = ٣٠° ، ق (ى^) = ٤٢°

أوجد :

① ق (جـ^)

② ق (أ جـ ب^)

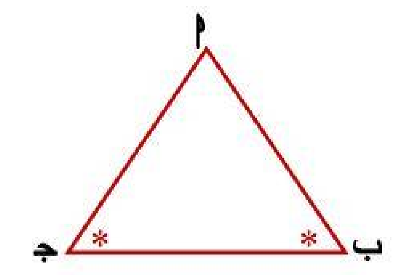


الدرس الثالث

عكس نظرية المثلث المتساوي الساقين

عكس النظرية (١)

إذا تطابقت زاويتان فى مثلث فأن الضلعين المقابلين لهاتين الزاويتين يكونان متطابقين ويكون المثلث متساوي الساقين.



فمثلاً : في الشكل المقابل :-

إذا كان : ق (بَ̂) = ق (جَ̂)

فإن : أ ب = أ جـ

نتيجة

إذا تطابقت زوايا مثلث فإنه يكون متساوي الأضلاع

ملاحظة

إذا كان قياس أى زاويه في المثلث المتساوي الساقين تساوى ٦٠° كان المثلث متساوي الساقين

(١) في الشكل المقابل :-

إثبت أن المثلث أ ب جـ متساوى الساقين ؟

الحــل

∵ ق (ب جـ̂ ء) = ١٨٠° (زاوية مستقيمة)

∴ ق (أ جـ̂ ب) = ١٨٠° ـ ١٣٠° = ٥٠°

فى Δ أ ب جـ

∵ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

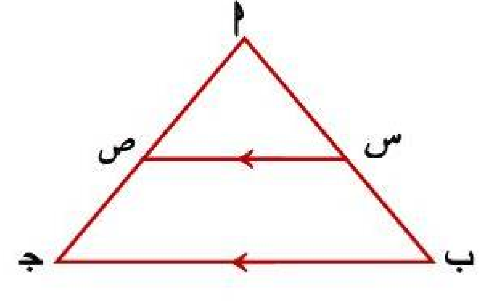
∴ ق (بَ̂) = ١٨٠° ـ [٨٠° + ٥٠°] = ١٨٠° ـ ١٣٠° = ٥٠°

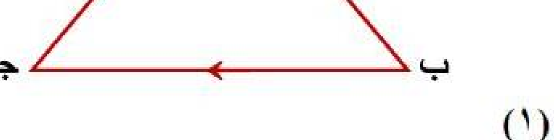
∴ ق (بَ̂) = ق (أ جـ̂ ب) = ٥٠°

∴ أ ب = ب جـ

∴ Δ أ ب جـ متساوى الساقين

(٢) في الشكل المقابل :-





أ ب = ب ج ، س ص // ب ج

إثبت أن : Δ أ س ص متساوى الساقين ؟

الحل

فى أ ب ج ∵ أ ب = ب ج

∴ ق (ب̂) = ق (ج̂) (١)

، ∵ س ص // ب ج

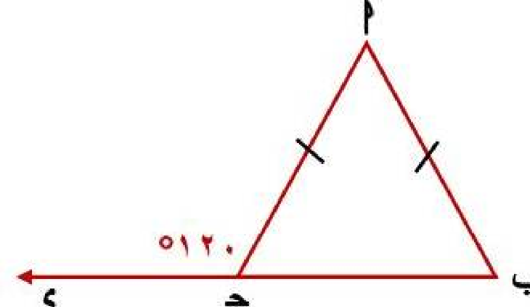
∴ ق (أ س̂ ص) = ق (ب̂) [بالتناظر] (٢)

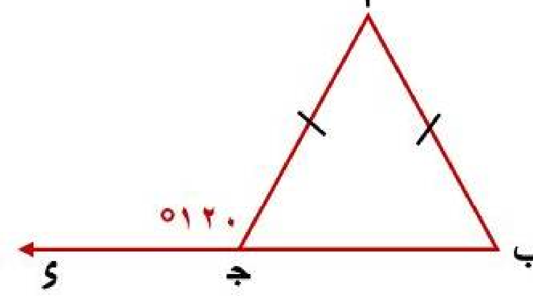
∴ ق (أ ص̂ س) = ق (ج̂) [بالتناظر] (٣)

من ١ ، ٢ ، ٣ ينتج أن :

ق (أ س̂ ص) = ق (أ ص̂ س) ∴ Δ أ س ص متساوى الساقين

(٣) في الشكل المقابل :-





إثبت أن : Δ أ ب ج متساوى الساقين ؟

الحل

∵ ق (ب ج̂ د) = ١٨٠° (زاوية مستقيمة)

∴ ق (أ ج̂ ب) = ١٨٠° ــ ١٢٠° = ٦٠°

فى أ ب ج ∵ أ ب = ب ج

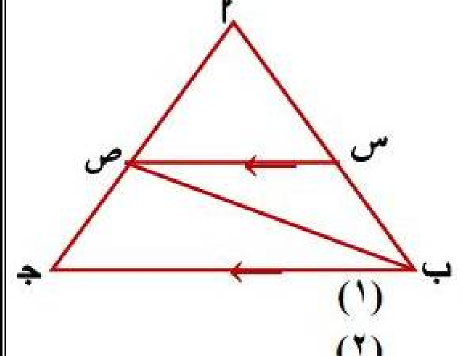
∴ ق (أ ب̂ ج) = ق (أ ج̂ ب) = ٦٠°

∵ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

∴ ق (أ̂) = ١٨٠° – [٦٠° + ٦٠°] = ٦٠°

∴ ق (أ̂) = ق (أ ب̂ ج) = ق (أ ج̂ ب) ∴ Δ أ ب ج متساوى الأضلاع

(٤) في الشكل المقابل :-



س ص // ب ج ، ب ص ينصف (أ ب̂ ج)

إثبت أن : س ب ص مثلث متساوى الساقين ؟

الحل

س ص // ب ج ∴ ق (س ص̂ ب) = ق (ص ب̂ ج) (١)

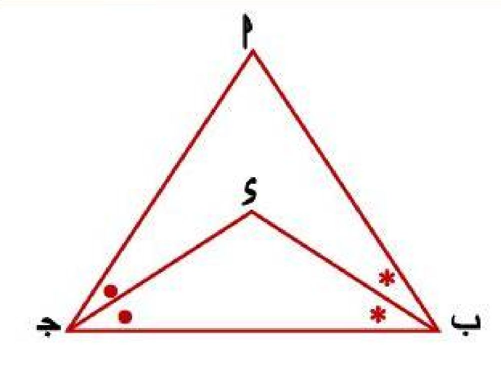
ب ص ينصف (أ ب̂ ج) ∴ ق (س ب̂ ص) = ق (ص ب̂ ج) (٢)

من ١ ، ٢ ينتج أن :

ق (س ص̂ ب) = ق (س ب̂ ص)

∴ س ب ص مثلث متساوى الساقين

(٥) في الشكل المقابل :-



أ ب = ب ج

ب ء ينصف أ ب ج

ج ء ينصف أ ج ء

إثبت أن : ء ب ج مثلث متساوى الساقين ؟



أ ب = ب ج ∴ ق (ب̂) = ق (ج̂)

ب ء ينصف (أ ب̂ ج) ∴ ق (ء ب̂ ج) = $\frac{1}{2}$ ق (ب̂)

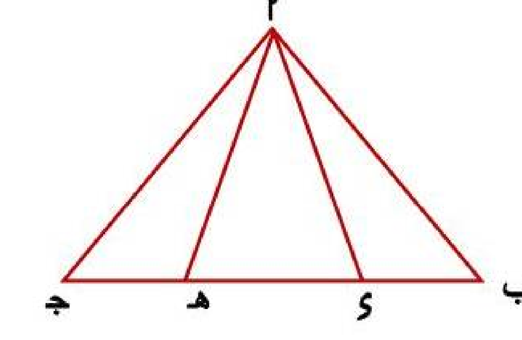
ج ء ينصف (أ ج̂ ء) ∴ ق (ء ج̂ ب) = $\frac{1}{2}$ ق (ج̂)

من ١ ، ٢ ، ٣ ينتج أن :-

ق (ء ب̂ ج) = ق (ء ج̂ ب)

∴ ء ب ج مثلث متساوى الساقين

(٦) في الشكل المقابل :-



أ ب = أ ج ، ب ء = ج هـ

إثبت أن : أ ء هـ مثلث متساوى الساقين ؟



ΔΔ أ ب ء ، أ هـ ج

فيهما

أ ب = أ ج

ب ء = ج هـ

ق (ب̂) = ق (ج̂) [لإن : أ ب = أ ج]

∴ أ ب ء ≡ أ هـ ج

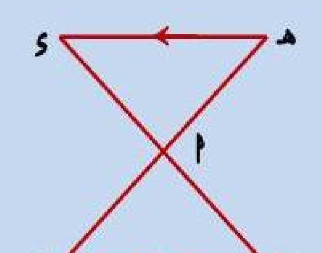
ومن التطابق ينتج أن : أ ء = أ هـ ∴ Δ أ ء هـ متساوى الساقين

اجب بنفسك

(١) فى الشكل المقابل :

هـ ء // ب ج ، أ ب = أ ج

أثبت أن : أ هـ = أ ء



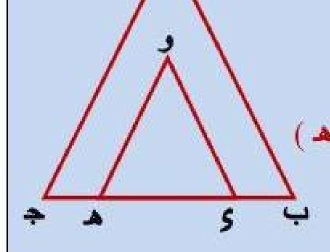
(٢) فى الشكل المقابل :

أ ب = أ ج ، أ ب // و ء ، أ ج // و هـ

أثبت أن :

① و ء = و هـ

② ق (ب أ ج) = ق (ء و هـ)

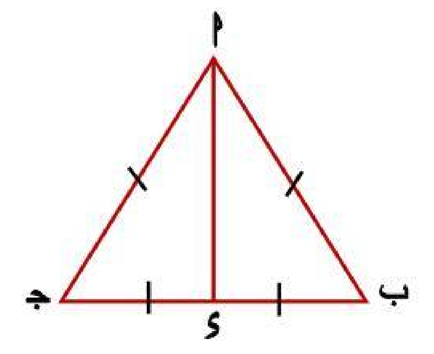




نتائج على نظريات المثلث المتساوى الساقين

نتيجة (١)

متوسط المثلث المتساوى الساقين المرسوم من زاوية الرأس ينصف زاوية الرأس ويكون عموديا على القاعدة



في الشكل المقابل :-

إذا كان ﺃ ب ﺟ مثلثا فيه :

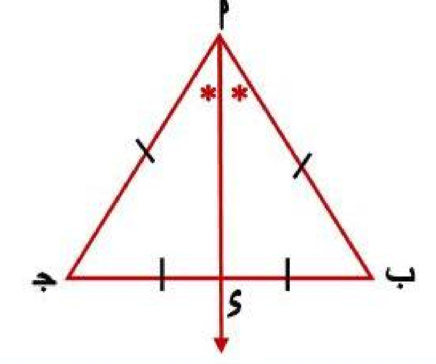
ﺃ ب = ﺃ ﺟ ، ﺃ ﺀ متوسط (ﺀ منتصف ب ﺟ) فإن :-

❶ ﺃ ﺀ ينصف (ب $\hat{ﺃ}$ ﺟ)

❷ ﺃ ﺀ ⊥ ب ﺟ

نتيجة (٢)

منصف زاوية الرأس فى المثلث المتساوى الساقين ينصف القاعدة ويكون عموديا عليها



في الشكل المقابل :-

إذا كان ﺃ ب ﺟ مثلثا فيه :

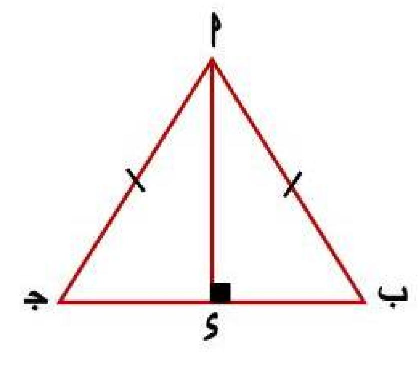
ﺃ ب = ﺃ ﺟ ، ﺃ ﺀ ينصف (ب $\hat{ﺃ}$ ﺟ) فإن :-

❶ ﺀ منتصف ب ﺟ

❷ ﺃ ﺀ ⊥ ب ﺟ

نتيجة (٣)

المستقيم المرسوم من رأس المثلث المتساوى الساقين عموديا على القاعدة ينصف كلا من القاعدة وزاوية الرأس



في الشكل المقابل :-

إذا كان ﺃ ب ﺟ مثلثا فيه :

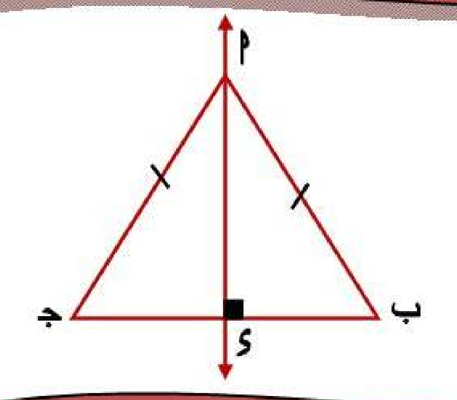
ﺃ ب = ﺃ ﺟ ، ﺃ ﺀ ⊥ ب ﺟ فإن :-

❶ ﺀ منتصف ب ﺟ

❷ ق (ب $\hat{ﺃ}$ ﺀ) = ق (ﺟ $\hat{ﺃ}$ ﺀ)

محور تماثل المثلث المتساوي الساقين

محور التماثل للمثلث المتساوى الساقين هو المستقيم المرسوم من رأسه عموديا على القاعدة



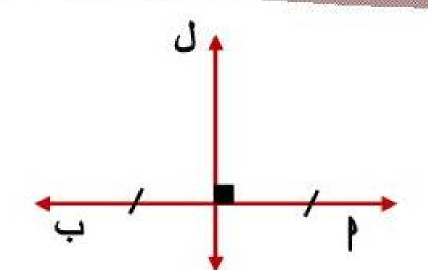
فمثلاً : إذا كان ٲ ب جـ مثلثا متساوي الساقين

، ٲ ب = ٲ جـ ، ٲ ء ⊥ ب جـ **فإن :-**

ٲ ء يسمى محور تماثل للمثلث ٲ ب جـ المتساوي الساقين

محور تماثل القطعة المستقيمة

محور القطعة المستقيمة هو المستقيم العمودى عليها من منتصفها



في الشكل المقابل :-

إذا كان المستقيم ل ⊥ ٲ ب من منتصفها

فإن : ل يسمى محور ٲ ب

محاور التماثل لبعض الأشكال الهندسية :-

الشكل	عدد المحاور	الشكل	عدد المحاور
المثلث المتساوي الساقين	١	المستطيل	٢
المثلث المتساوي الأضلاع	٣	المعين	٢
المثلث المختلف الأضلاع	صفر	متوازي الأضلاع	صفر
المربع	٤	شبه المنحرف متساوى الساقين	١

بعد دراسة نتائج المثلث المتساوي الساقين نستنتج أن :

❶ منصف زاوية رأس المثلث المتساوي الساقين يكون **محور تماثل للمثلث**

❷ المتوسط المرسوم من رأس المثلث المتساوي الساقين يكون **محور تماثل للمثلث**

❸ المستقيم المرسوم من رأس المثلث المتساوي الساقين عموديا علي القاعدة يكون **محور تماثل للمثلث**

(١) في الشكل المقابل :-

أ ب ج مثلث فيه ق (ب أ^ ج) = ٥٠ ، ق (ب^) = ٦٥ ، أ ء متوسط

أوجد : ق (ب أ^ ء) ، ق (أ ء^ ج) ؟



الحل

أ ء متوسط　　أ ء ينصف (ب أ^ ج)

ق (ب أ^ ء) = $\frac{٥٠}{٢}$ = ٢٥°

أ ء متوسط　　أ ء ⊥ ب ج　　ق (أ ء^ ج) = ٩٠°

(٢) في الشكل المقابل :-

أ ب ج مثلث فيه ق (ب أ^ ء) = ق (ج أ ء) = ٣٥° ،
ق (أ ج هـ) = ١٢٥°

أثبت أن : ① أ ء ⊥ ب ج　　② أ ء متوسط

الحل

∵ (أ ج^ هـ) خارجة عن Δ أ ء ج

ق (أ ء^ ج) = ١٢٥° ـ ٣٥° = ٩٠°　　∴ أ ء ⊥ ب ج　　(أولا)

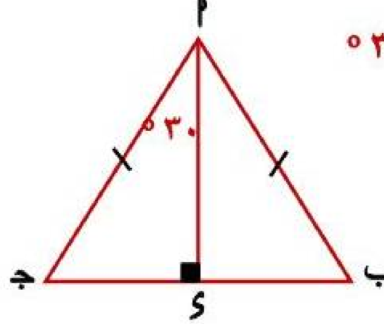
∵ أ ء ينصف (أ^)　　∴ Δ أ ب ج متساوي الساقين　　∴ أ ء متوسط فى Δ أ ب ج　　(ثانيا)

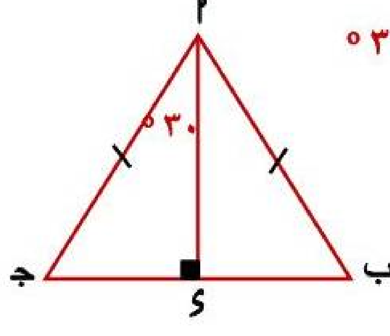
(٣) في الشكل المقابل :-

أ ب = أ ج ، ب ج = ١٠ سم ، أ ء ⊥ ب ج ، ق (ج أ^ ء) = ٣٠°

① أوجد : طول ب ء ؟

② أثبت أن : Δ أ ب ج متساوي الأضلاع





الحل

∵ أ ب = أ ج ، أ ء ⊥ ب ج

∴ أ ء متوسط ⟸ ب ء = ج ء = $\frac{١}{٢}$ ب ج = ٥ سم

أ ء ينصف (أ^) ⟸ ق (ب أ^ ء) = ق (ج أ^ ء) = ٣٠°

∵ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

∴ ق (ب^) = ١٨٠° ـ [٣٠° + ٩٠°] = ٦٠°

∵ Δ أ ب ج متساوي الساقين ، ق (ب^) = ٦٠°　　(إحدى زواياه)

∴ Δ أ ب ج متساوي الأضلاع

اجب بنفسك

(١) فى الشكل المقابل :

أ ب = أ جـ ، أ ء ⊥ ب جـ

ب جـ = ٦ سم ، ق (ب أ ء) = ٢٨°

أوجد :

① ق (ء أ جـ)

② طول ء جـ

(٢) فى الشكل المقابل :

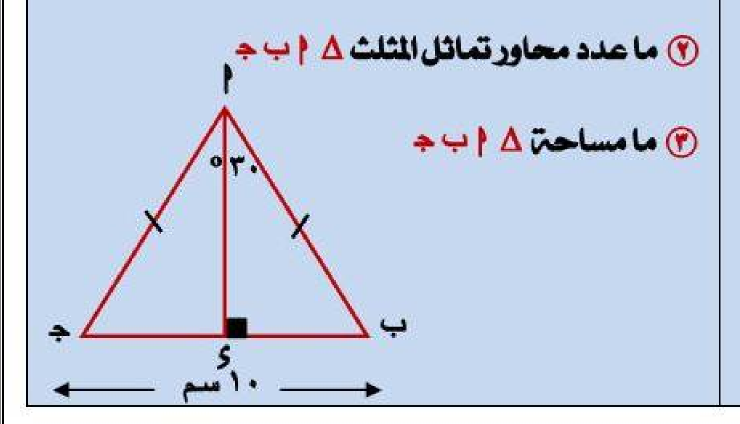
أ ب = أ جـ ، ب جـ = ١٠سم ، أ ء ⊥ ب جـ

، ق (ب أ ء) = ٣٠°

① **أوجد طول كل من :** ب ء ، أ ء

② **ما عدد محاور تماثل المثلث** Δ أ ب جـ

③ **ما مساحة** Δ أ ب جـ



مع أرق الأمنيات بالتفوق الباهر

أ/ محمد محمود

مدرس الرياضيات

الوحدة الخامسة

- ✓ التباين
- ✓ المقارنة بين قياسات الزوايا فى المثلث
- ✓ المقارنة بين أطوال الأضلاع في المثلث
- ✓ متباينة المثلث



التباين

لأي أربعة أعداد س ، ص ، ع ، أ فإن :-

❶ إذا كان س > ص فإن : س + ع > ص + ع

❷ إذا كان س > ص فإن : س − ع > ص − ع

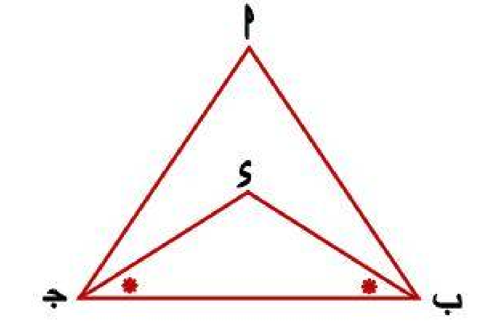
❸ إذا كان س > ص ، ع (عدد موجب) فإن : س ع > ص ع

❹ إذا كان س > ص ، ع (عدد سالب) فإن : س ع < ص ع

❺ إذا كان س > ص ، ص > ع فإن : س > ع

❻ إذا كان س > ص ، ع > أ فإن : س + ع > ص + أ

(١) في الشكل المقابل :-



ق (أ ب̂ د) > ق (أ ج̂ د)

ق (د ب̂ ج) = ق (د ج̂ ب)

أثبت أن : ق (ب̂) > ق (ج̂)

الحل

∵ ق (أ ب̂ د) > ق (أ ج̂ د) (١)

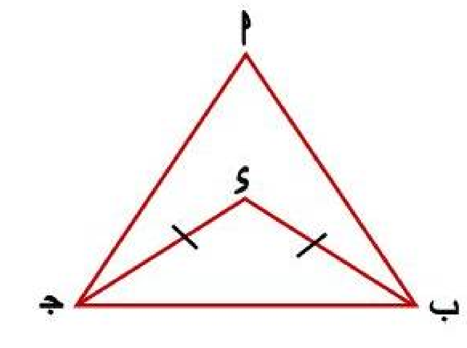
∵ ق (د ب̂ ج) = ق (د ج̂ ب) (٢)

بجمع (١) ، (٢) ينتج أن :

ق (أ ب̂ د) + ق (د ب̂ ج) > ق (أ ج̂ د) + ق (د ج̂ ب)

∴ ق (ب̂) > ق (ج̂)





ق (أ ب̂ د) > ق (أ ج̂ د) ، د ب = د ج

أثبت أن : ق (ب̂) > ق (ج̂)



∵ ق (أ ب̂ د) > ق (أ ج̂ د) (١)

، ∵ د ب = د ج

∵ ق (د ب̂ ج) = ق (د ج̂ ب) (٢)

بجمع (١) ، (٢) ينتج أن :

ق (أ ب̂ د) + ق (د ب̂ ج) > ق (أ ج̂ د) + ق (د ج̂ ب)

∴ ق (ب̂) > ق (ج̂)

(٣) في الشكل المقابل :-

إثبت أن : ق (ب ء^ جـ) > ق (أ^) ؟

الحـــل

العمل نرسم أ ء

∵ ق (ب ء^ هـ) > ق (ب أ^ ء) [لأنها خارجة عن Δ أ ب ء] (١)

∵ ق (جـ ء^ هـ) > ق (أ ء^ جـ) [لأنها خارجة عن Δ أ ء جـ] (٢)

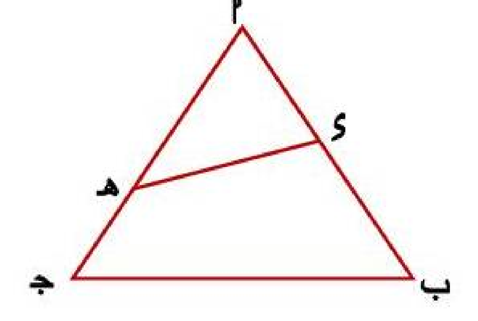
بجمع (١) ، (٢) ينتج أن :

∴ ق (ب ء^ هـ) + ق (جـ ء^ هـ) > ق (ب أ^ ء) + ق (أ ء^ جـ)

∴ ق (ب ء^ جـ) > ق (أ^)

اجب بنفسك

(٤) في الشكل المقابل :-

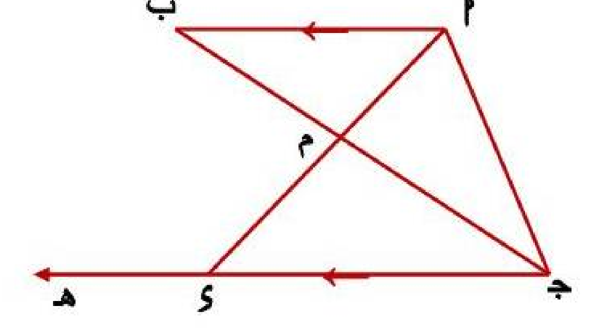


إذا كان : أ ب > أ جـ

، ق (أ ء^ هـ) = ق (أ ء^ هـ)

إثبت أن : ء ب > هـ جـ ؟

(٥) في الشكل المقابل :-



إذا كان : أ ب // ء جـ

إثبت أن :

❶ ق (أ جـ^ ء) > ق (أ ب^ جـ)

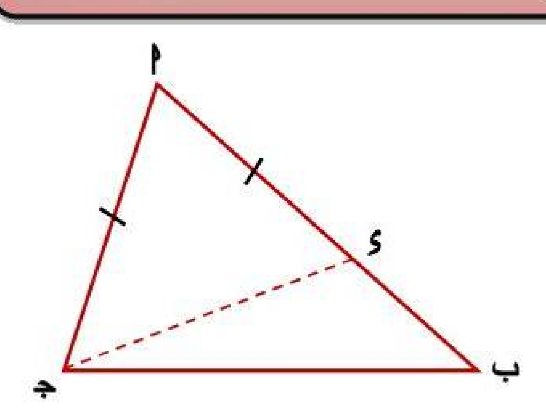
❷ ق (أ ء^ هـ) > ق (أ ب^ جـ)



المقارنة بين قياسات الزوايا في المثلث

نظريـــة

إذا إختلف طولا ضلعين في مثلث فأكبرهما فى الطول تقابله زاوية أكبر فى القياس من الزاوية المقابلة للضلع الأخر.



المعطيات | Δ أ ب ج مثلث فيه أ ب > أ ج

المطلوب | إثبات أن : ق (∠ أ ج ب) = ق (∠ أ ب ج)

العمل | نأخذ ء ∈ $\overline{\text{أ ب}}$ بحيث : أ ء = أ ج

البرهان | فى Δ أ ج ء ∵ أ ء = أ ج

∴ ق (∠ أ ج ء) = ق (∠ أ ء ج) (١)

∵ (∠ أ ء ج) خارجة عن Δ ء ب ج

∴ ق (∠ أ ء ج) > ق (∠ ب) (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن :

ق (∠ أ ج ء) > ق (∠ ب)

∴ ق (∠ أ ج ب) > ق (∠ أ ء ج)

∴ ق (∠ أ ج ب) > ق (∠ أ ب ج)

تمارين متنوعة

(١) في الشكل المقابل :-

أ ب > أ ء ، ج ب > ء ج

إثبت أن : ق (∠ أ ء ج) > ق (∠ أ ب ج)

الحــل



فى Δ أ ب ء

∵ أ ب > أ ء ∴ ق (∠ أ ء ب) > ق (∠ أ ب ء) (١)

فى Δ ب ء ج

∵ ب ج > ء ج ∴ ق (∠ ب ء ج) > ق (∠ ء ب ج) (٢)

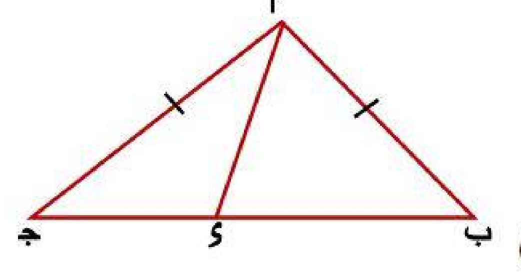
بجمع (١) ، (٢) ينتج أن :

∴ ق (∠ أ ء ب) + ق (∠ ب ء ج) > ق (∠ أ ب ء) + ق (∠ ء ب ج)

∴ ق (∠ أ ء ج) > ق (∠ أ ب ج)



(٢) في الشكل المقابل :-



ا ب = ا جـ ، ء ∈ ب جـ

برهن أن : ق (ا ء ب) > ق (ب)

الحـــل

فى Δ ا ب جـ

∵ ا ب = ا جـ ∴ ق (ب) = ق (جـ) (١)

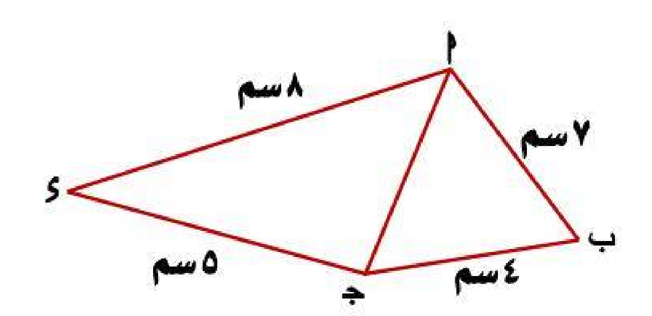
، ∵ (ا ء ب) زاوية خارجة عن Δ ا ء جـ

∴ ق (ا ء ب) > ق (جـ) (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن :

∴ ق (ا ء ب) > ق (ب)

(٣) في الشكل المقابل :-



برهن أن : ق (ب جـ ء) > ق (ب ا ء)

الحـــل

فى Δ ا ب جـ

∵ ا ب > ب جـ ∴ ق (ا جـ ب) > ق (ب ا جـ) (١)

فى Δ ا ء جـ

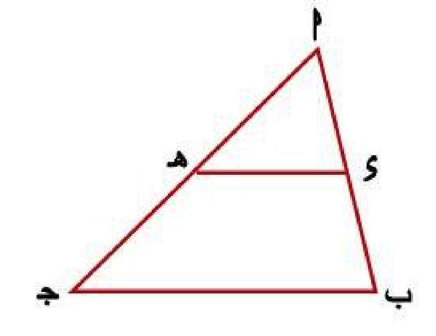
∵ ا ء > جـ ء ∴ ق (ا جـ ء) > ق (جـ ا ء) (٢)

بجمع (١) ، (٢) ينتج أن :

∴ ق (ا جـ ب) + ق (ا جـ ء) > ق (ب ا جـ) + ق (جـ ا ء)

∴ ق (ب جـ ء) > ق (ب ا ء)

(٤) في الشكل المقابل :-



ا جـ > ا ب

ء ، هـ منتصفا ا ب ، ا جـ

برهن أن: ق (ا هـ ء) > ق (ا ء هـ)

الحـــل

فى Δ ا ب جـ

∵ ا جـ > ا ب ∴ ق (ب) > ق (جـ) (١)

∵ ء منتصف ا ب ، هـ منتصف ا جـ

∴ ء هـ // ب جـ

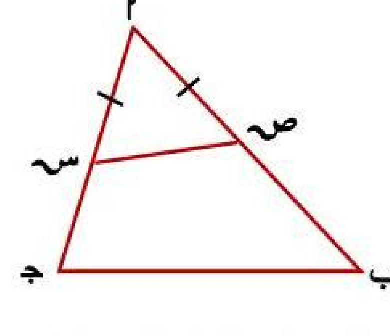
∴ ق (ا ء هـ) = ق (ب) (٢)

∴ ق (ا هـ ء) = ق (جـ) (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) ينتج أن :

∴ ق (ا هـ ء) > ق (ا ء هـ)

(٥) في الشكل المقابل :-



△ أ ب جـ فيه : أ س = أ ص ، س جـ > ص ب

<u>إثبت أن</u> : ق (ب̂) > ق (جـ̂)

الحــل

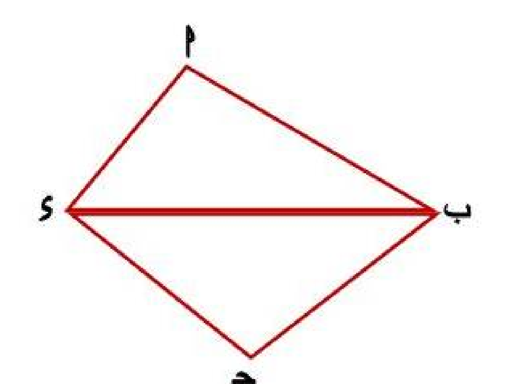
∵ أ س = أ ص ، ∵ س جـ > ص ب

∴ أ س + س جـ > أ ص + ص ب (من خواص علاقة > مسلمات فى التباين)

∴ أ جـ > أ ب

∴ ق (ب̂) > ق (جـ̂)

(٦) في الشكل المقابل :-



أ جـ > أ د

ب جـ = جـ د

<u>إثبت أن</u> : ق (أ جـ̂ د) > ق (أ ب̂ جـ)

الحــل

فى △ أ ب د

∵ أ ب > أ د ∴ ق (أ د̂ ب) > ق (أ ب̂ د) (١)

فى △ ب جـ د

∵ ب جـ = جـ د ∴ ق (جـ ب̂ د) = ق (جـ د̂ ب) (٢)

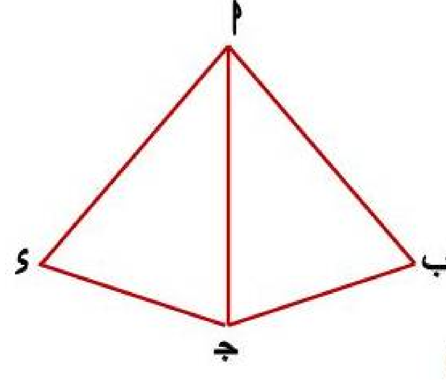
بجمع (١) ، (٢) ينتج أن :

∴ ق (أ د̂ ب) + ق (جـ د̂ ب) > ق (أ ب̂ د) + ق (جـ ب̂ د)

∴ ق (أ د̂ جـ) > ق (أ ب̂ جـ)



(٧) في الشكل المقابل :-



أ ب > ب جـ ، أ د > د جـ

<u>برهن أن</u> : ق (ب د̂ جـ) > ق (ب د̂ أ)

الحــل

فى △ أ ب جـ

∵ أ ب > ب جـ ∴ ق (أ جـ̂ ب) > ق (ب أ̂ جـ) (١)

فى △ أ جـ د

∵ أ د > د جـ ∴ ق (أ جـ̂ د) > ق (جـ أ̂ د) (٢)

بجمع (١) ، (٢) ينتج أن :

∴ ق (أ جـ̂ ب) + ق (أ جـ̂ د) > ق (ب أ̂ جـ) + ق (جـ أ̂ د)

∴ ق (ب جـ̂ د) > ق (ب أ̂ د)

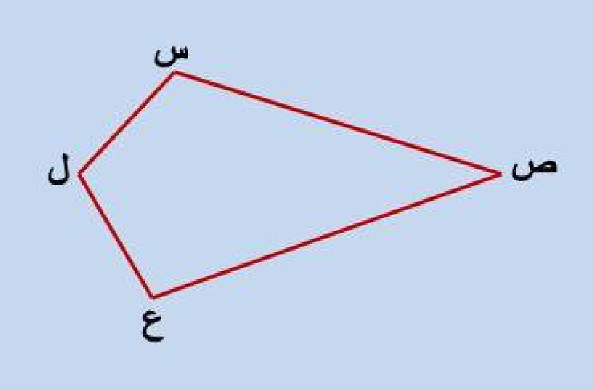
اجب بنفسك

(١) فى الشكل المقابل :

س ص > س ل ، ص ع > ع ل

برهن أن :

ق (س ل̂ ع) > ق (س ص̂ ع)



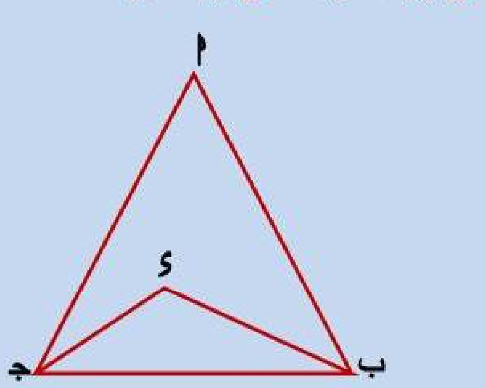
(٢) فى الشكل المقابل :

ا ب جـ مثلث فيه : ا ب = ا جـ

، ء ب > ء جـ

برهن أن :

ق (ا ب̂ ء) > ق (ا جـ̂ ء)



مع أرق الأمنيات بالتفوق الباهر

أ/ محمد محمود

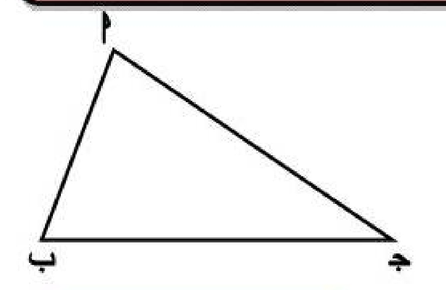
مدرس الرياضيات



المقارنة بين أطوال الأضلاع في المثلث

نظرية

إذا أختلف قياس زاويتين في مثلث فأكبرهما في القياس يقابلها ضلع أكبر في الطول من الذي يقابل الأخرى.



المعطيات Δ أ ب ج مثلث فيه : ق ($\hat{ب}$) > ق ($\hat{ج}$)

المطلوب إثبات أن : أ ج > أ ب

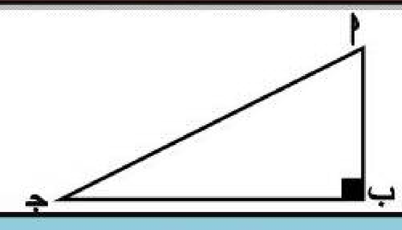
البرهان $\overline{أب}$ ، $\overline{أج}$ قطعتان مستقيمتان

العلاقة بين طوليهما تتحدد بإحدى الصور الآتية :

❶ $\because$ أ ب = أ ج	❷ $\because$ أ ب > أ ج	❸ $\because$ أ ب < أ ج
$\therefore$ ق ($\hat{ب}$) = ق ($\hat{ج}$)	$\therefore$ ق ($\hat{ج}$) > ق ($\hat{ب}$)	$\therefore$ ق ($\hat{ج}$) < ق ($\hat{ب}$)
غير منطقي	غير منطقي	يطابق المعطي
لأن : ق ($\hat{ب}$) > ق ($\hat{ج}$)	لأن : ق ($\hat{ب}$) > ق ($\hat{ج}$)	$\therefore$ تتحقق النظرية

نتيجة (١)

في المثلث القائم الزاوية يكون الوتر هو أطول أضلاع المثلث



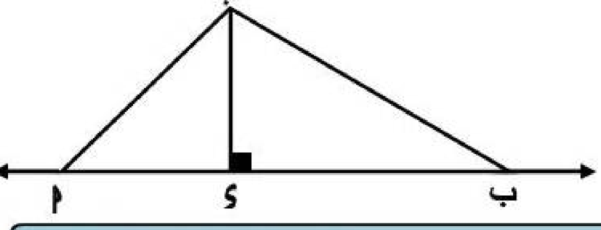
إذا كان : أ ب ج مثلثا قائم الزاوية في ب

فإن : أ ج > ب ج ، أ ج > أ ب

لاحظ أن : في المثلث المنفرج الزاوية الضلع المقابل للزاوية المنفرجة هو أطول أضلاع المثلث

نتيجة (٢)

طول القطعة المستقيمة العمودية المرسومة من نقطة خارج مستقيم معلوم إلي هذا المستقيم أصغر من طول أي قطعة مستقيمة مرسومة من هذه النقطة إلى المستقيم المعلوم.



من الشكل المقابل نستنتج أن :

ج ء < ج ب ، ج ء < أ ج

ويكون بعد النقطة ج عن $\overleftrightarrow{أب}$ هو طول $\overline{جء}$



(١) في الشكل المقابل :-

ا ب > ا جـ

ب ء ينصف (ا بَ جـ) ، جـ ء ينصف (ا جَ ء)

إثبت أن : ء ب > ء جـ

الحـــل

∵ ا ب > ا جـ   ∴ ق (جَ) > ق (بَ)

∵ ب ء ينصف (ا بَ جـ)   ∴ ق (ء بَ جـ) = $\frac{1}{2}$ ق (بَ)

∵ جـ ء ينصف (ا جَ ء)   ∴ ق (ء جَ ب) = $\frac{1}{2}$ ق (جَ)

من (١) ، (٢) ، (٣) ينتج أن :

∴ ق (ء جَ ب) > ق (ء بَ جـ)   ⇐   ∴ ء ب > ء جـ

(٢) في الشكل المقابل :-

ا ب جـ مثلثا قائم الزاوية في ب ، ء ∈ ب جـ

إثبت أن : ا جـ > ا ء

الحـــل

في △ ا ب جـ

∵ △ قائم الزاوية في ب   ∴ ق (بَ) > ق (جَ)   (١)

∵ (ا ءَ جـ) زاوية خارجة عن △ ا ب جـ

∴ ق (ا ءَ جـ) > ق (بَ)   (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن :

∴ ق (ا ءَ جـ) > ق (جَ)   ⇐   ∴ ا جـ > ا ء

(٣) في الشكل المقابل :-

إذا كان : ا جـ > ا ب

ا ب // و ء ، ا جـ // و هـ

برهن أن : هـ و > و ء

الحـــل

في △ ا ب جـ

∵ ا جـ > ا ب   ∴ ق (بَ) > ق (جَ)   (١)

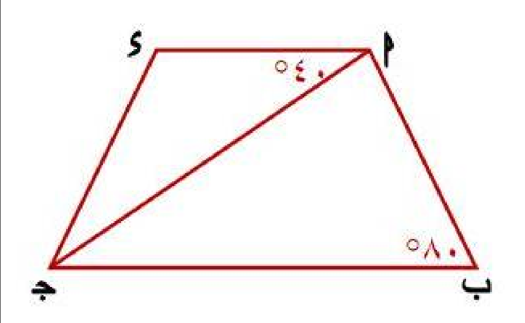
∵ ا ب // و ء   ∴ ق (و ءَ هـ) = ق (بَ)   (٢)

∵ ا جـ // و هـ   ∴ ق (و هَـ ء) = ق (جَ)   (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) ينتج أن :

∴ ق (و ءَ هـ) > ق (و هَـ ء)   ⇐   هـ و > و ء

(٤) في الشكل المقابل :-



أ ء // ب جـ ، ق (ب أ جـ) = ٨٠°
، ق (ء أ جـ) = ٤٠°
إثبت أن : أ جـ > ب جـ

الحـــل

أ ء // ب جـ ∴ ق (أ جـ ب) = ق (ء أ جـ) = ٤٠°

في Δ أ ب جـ ∵ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

∴ ق (ب أ جـ) = ١٨٠° − [٨٠° + ٤٠°] = ٦٠°

∴ ق (أ ب جـ) > ق (ب أ جـ) ⟸ ∴ أ جـ > ب جـ

(٥) في الشكل المقابل :-

إذا كان : أ هـ // ب جـ
إثبت أن : أ جـ > ب جـ



الحـــل

∵ أ هـ // ب جـ ، أ جـ قاطع لهما

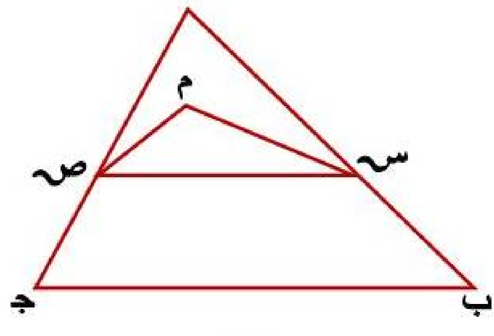
∴ ق (ب) = ق (ء أ هـ) = ٧٠° [بالتناظر]

، ق (جـ) = ق (هـ أ جـ) = ٣٠° [بالتبادل]

في Δ أ ب جـ

∵ ق (ب) > ق (جـ) ⟸ ∴ أ جـ > ب جـ

(٦) في الشكل المقابل :-



أ ب > أ جـ ، س ص // ب جـ
م س ينصف (أ س ص) ، م ص ينصف (أ ص س)
برهن أن : م س > م ص

الحـــل

في Δ أ ب جـ

∵ أ ب > أ جـ ∴ ق (جـ) > ق (ب) (١)

∵ س ص // ب جـ ∴ ق (أ س ص) = ق (ب) (٢)

، ق (أ ص س) = ق (جـ) (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) ينتج أن : ق (أ ص س) > ق (أ س ص) (٤)

∵ م س ينصف (أ س ص) ∴ ق (م س ص) = $\frac{1}{2}$ ق (أ س ص) (٥)

∵ م ص ينصف (أ ص س) ∴ ق (م ص س) = $\frac{1}{2}$ ق (أ ص س) (٦)

من (٤) ، (٥) ، (٦) ينتج أن : ق (م ص س) > ق (م س ص)

∴ م س > م ص

اجب بنفسك

(١) فى الشكل المقابل :

أ ب جـ مثلث ، ء ∈ جـ ب ، هـ ∈ أ جـ

، ق (أ ب̂ ء) = ١١٠° ، ق (ب جـ̂ هـ) = ١٢٠°

برهن أن :

أ ب > ب جـ

(٢) فى الشكل المقابل :

أ ب = جـ أ ، ق (أ ب̂ جـ) = ٦٥°

، ق (أ جـ̂ ء) = ٢٠° ، أ ∈ ء ب

برهن أن :

أ ب > أ ء

مع أرق الأمنيات بالتفوق الباهر

أ/ محمد محمود

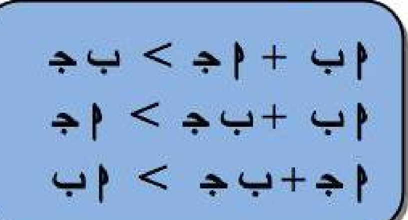
مدرس الرياضيات

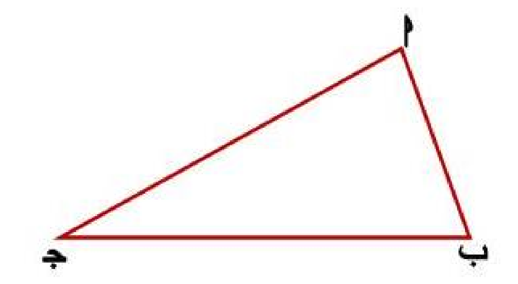


متباينة المثلث

في أي مثلث يكون مجموع طولي أي ضلعين أكبر من طول الضلع الثالث

أي أنه : في أي مثلث أ ب جـ يكون :


أ ب + أ جـ > ب جـ
أ ب + ب جـ > أ جـ
أ جـ + ب جـ > أ ب



نتيجة

طول أي ضلع فى المثلث أكبر من الفرق بين طولي الضلعين الآخرين وأقل من مجموعهما

فى أي مثلث يكون :

أ جـ + أ ب > ب جـ (١) (متباينة المثلث)

، أ ب + ب جـ > أ جـ (متباينة المثلث)

أي أن : ب جـ > أ جـ − أ ب (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن :

أ جـ − أ ب < ب جـ < أ ب + أ جـ

أ

ب جـ

لتحديد ما اذا كان أي ثلاثة أعداد تصلح أن تكون أطوالا لأضلاع مثلث أم لا :

نجمع أصغر عددين منهما ونقارن المجموع بالعدد الثالث فإذا كان المجموع أصغر من أو يساوي العدد الثالث فإن هذه الأعداد لا تصلح أن تكون أطوال مثلث ، وإذا كان المجموع أكبر من العدد الثالث فإن هذه الأعداد تصلح أن تكون أطوال أضلاع مثلث .

مثال (١) :- بين أيا من الاطوال الاتية تصلح أن تكون أضلاع مثلث :

① ٢سم ، ٥ سم ، ٣ سم
② ٣ سم ، ٧ سم ، ٥ سم
③ ٤ سم ، ١١ سم ، ٦ سم
④ ١٤ سم ، ٩ سم ، ٧ سم

الحل

① ٢ + ٣ = ٥ = ٥ لا تصلح ولا يمكن رسم المثلث

② ٣ + ٥ = ٨ > ٧ تصلح ويمكن رسم المثلث

③ ٤ + ٦ = ١٠ < ١١ لا تصلح ولا يمكن رسم المثلث

④ ٩ + ٧ = ١٦ > ١٤ تصلح ويمكن رسم المثلث

مثال(٢) :-

أوجد الفترة التى ينتمى إليها طول الضلع الثالث فى المثلث إذا كان طولا الضلعين الآخرين هما :

(١) ٥ سم ، ٧ سم　　(٢) ٣,٢ سم ، ١,٤ سم　　(٣) ٢√٥ سم ، ٢√٥ سم

(١) طول الضلع الثالث ∋] ٧ – ٥ ، ٧ + ٥ [　　∴ طول الضلع الثالث ∋] ٢ ، ١٢ [

(٢) طول الضلع الثالث ∋] ٣,٢ – ١,٤ ، ٣,٢ + ١,٤ [　　∴ طول الضلع الثالث ∋] ١,٨ ، ٤,٦ [

(٣) طول الضلع الثالث ∋] ٢√٥ – ٢√٥ ، ٢√٥ + ٢√٥ [

∴ طول الضلع الثالث ∋] صفر ، ٤√٥ [

طول أى ضلع فى المثلث ينتمى إلى الفترة المفتوحة التى أطرافها :

] الفرق بين طولي الضلعين الآخرين ، مجموع طولي الضلعين الآخرين [

مثال(٣) :- فى الشكل المقابل :

إذا كان محيط : س ص ع = ٥٠ سم

إثبت أن : س م + م ص + م ع > ٢٥



الحــل



∵ Δ س م ص **فيه**　س م + م ص > س ص

∵ Δ ص م ع **فيه**　ص م + م ع > ص ع

∵ Δ س م ع **فيه**　س م + م ع > س ع　　**بالجمع**

∴ س م + م ص + ص م + م ع + س م + م ع > س ص + ص ع + س ع

٢ س م + ٢ م ص + ٢ م ع > ٥٠　　÷ ٢

∴ س م + م ص + م ع > ٢٥

اجب بنفسك

(١) هل يمكن رسم مثلث أطوال أضلاعه كما يلى :

① ٥ سم ، ٧ سم ، ٨ سم　　② ١٠ سم ، ٦ سم ، ٤ سم

(٢)أوجد الفتره التي ينتمي إليها طول الضلع الثالث لكل من المثلثات الاتيه إذا كان طولا الضغلين الآخرين :

① ٦ سم ، ٥ سم　　② ٢,٩ سم ، ٣,٢ سم